

УДК 539.3

Е. Л. Гусев, д-р физико-математических наук, проф.,
Институт проблем нефти и газа Сибирского Отделения Российской академии наук,
Россия, ведущий научный сотрудник
Институт математики и информатики Северо-Восточного Федерального университета,
Россия, проф. кафедры прикладной математики
E-mail: elgusev@mail.ru

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С УТОЧНЕНИЕМ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Исследуются вопросы разработки эффективных, уточненных методов прогнозирования ресурса, долговечности конструкций из полимерных, композиционных материалов, основанных на современных достижениях в области математического моделирования. Сформулированы утверждения, позволяющие выявить условия на параметры задач прогнозирования в уточненных постановках, при выполнении которых применение разработанных методов может позволить осуществлять прогноз остаточного ресурса полимерных композитов с заранее заданной точностью.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы, методы возможных направлений, остаточный ресурс, долгосрочное прогнозирование, экстремальные климатические факторы.

E. L. Gusev

TASKS ASSOCIATED WITH THE SPECIFICATION OF FORECASTING MODELS OF RESIDUAL RESOURCE OF THE POLIMERIC COMPOSITES AND METHODS FOR THEIR SOLUTION

It is researched the problems of the development effective, elaborated methods of the forecasting of the resource, longevity structures from polymeric, composite materials, founded on modern achievements in the field of mathematical modeling. Formulated approval allowing to identify the conditions on the parameters of the prediction tasks in the refined productions, under which the application of the developed methods may allow to forecast the residual resource of polymer composites with predetermined accuracy

Keywords: polymeric composite materials, methods of possible directions, residual resource, long-term forecasting, extreme climatic factors.

1. Введение

Одной из важных проблем при разработке различных конструкций, машин и механизмов является проблема создания надежных методов количественной оценки работоспособности конструкций из полимерных и композиционных материалов [1-9]. В случае, когда полученные экспериментальные данные достаточно адекватно отображают структуру зависимости изменения остаточного ресурса полимерного композита, задача восстановления параметров моделей может быть сведена к решению следующей экстремальной задачи:

$$J(u^*) = \min_u J(u). \quad (1)$$

В этих обозначениях: $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор параметров модели прогнозирования. Вектор параметров $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, доставляющих минимум показателю эффективности $J(u)$ (1), определяет оптимальную прогнозируемую временную зависимость изменения остаточного ресурса полимерного композита.

Как отмечалось в работах [2-4] эффективное решение проблемы как краткосрочного, так и средне-, и долгосрочного прогнозирования возможно в том случае, если по результатам краткосрочных экспериментов можно выделить устойчивые закономерности поведения полимерных, композиционных материалов при воздействии экстремальных факторов внешней среды. Такого рода устойчивые закономерности определяются особенностями микро-, и макроструктуры конкретных видов полимерных, композиционных материалов. Установление таких устойчивых закономерностей может служить основой для разработки эффективных методов долгосрочного прогнозирования. Также в работе [2] было отмечено, что составной частью проблемы разработки эффективных методов прогноза является решение проблемы эффективного построения глобально-оптимальных решений, доставляющих абсолютный минимум многопараметрическим критериям эффективности, связанным с решением задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов при воздействии экстремальных факторов внешней среды и эксплуатационных нагрузок. Проблема же достоверного построения глобально-оптимальных решений сложнопостроенных многопараметрических критериев эффективности в настоящее время является чрезвычайно сложной. Также в работах [2-4] был сделан вывод, что методы ускоренных испытаний не могут служить достоверно обоснованным подходом к решению задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов, поскольку дать строгое обоснование методу ускоренных испытаний не представляется возможным.

В настоящее время задачи математического моделирования задач прогнозирования, ресурса, надежности конструкций из полимерных композитов при воздействии экстремальных климатических факторов внешней среды, решаются в значительно упрощенных постановках, не учитывающих значительное число факторов, оказывающих существенное влияние на точность решения. В частности, не учитывается свойство некорректности по А.Н. Тихонову задач прогнозирования, как обратных задач математической физики; не учитывается дополнительная информация о законах распределения ошибок измерения определяющих свойств полимерных композитов; не разработана теория построения оценок точности прогноза, применяемые методы прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов не учитывают современных достижений в области математического моделирования, связанных с многомерным регрессионным анализом, современной теорией распознавания образов, современным кластерным анализом.

В соответствии с этим, актуальной является проблема разработки эффективных, уточненных методов прогнозирования ресурса, надежности, долговечности конструкций из полимерных, композиционных материалов, основанных на современных достижениях в области математического моделирования.

В соответствии с выводами, сделанными в работах [2-4], основу разрабатываемого подхода составляет установление новых качественных закономерностей влияния микро-, и макроструктурных особенностей полимерных, композиционных материалов на характер изменения остаточного ресурса под воздействием экстремальных факторов внешней среды и эксплуатационных нагрузок. Включение установленных новых качественных закономерностей влияния микро-, и макроструктурных особенностей полимерных, композиционных материалов на характер изменения остаточного ресурса, в постановку задачи прогнозирования, позволит существенно уточнить постановку задачи прогнозирования, значительно уменьшить множество сравниваемых между собой исследуемых прогнозируемых зависимостей остаточного ресурса, содержащее искомую реальную временную зависимость остаточного ресурса. А следовательно, позво-

лит существенно повысить эффективность и достоверность прогнозирования остаточного ресурса полимерных, композиционных материалов на основе включения в постановку новой дополнительной информации о качественных закономерностях задач прогнозирования остаточного ресурса.

2. Уточненные постановки задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов

Проведем обобщение постановок задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов. Будем считать, что измерения остаточного ресурса R произведены с определенными случайными ошибками, в результате чего результаты измерений, величины $R_i, (i = 1, \dots, m)$ будут являться случайными величинами. Будем считать также, что R_i – непрерывные случайные величины с законами распределения $F_i(z)$ и функциями плотности вероятности $p_i(z)$. Пусть значения случайной величины R_i заключены в пределах от R_i^{\min} до R_i^{\max} . Функция распределения $F_i(z)$ определяется выражением

$$F_i(z) = \int_{R_{\min}}^z p_i(\xi) d\xi, \quad (i = 1, \dots, m). \tag{2}$$

Обозначим через $R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*$ действительные значения остаточного ресурса в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m . При этом, ошибки измерения остаточного ресурса $Q_i = R_i - R_i^*$ также будут являться случайными величинами, удовлетворяющими условию

$$|Q_i| \leq Q_{\max}, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3}$$

Здесь Q_{\max} – максимально допустимая погрешность измерений.

Следующим уточнением постановки задачи прогнозирования является введение в постановку задачи предельно допустимой точности прогнозирования. Нижнюю и верхнюю границы временного интервала прогнозирования обозначим соответственно через T_{\min}, T_{\max} .

Определение 1.

Под предельно допустимой точностью прогноза γ_R^{\max} будем понимать предельно допустимое отклонение прогнозируемой зависимости $\tilde{R}(t)$ остаточного ресурса R от реальной зависимости $R^(t)$ на прогнозируемом отрезке времени $[T_{\min}, T_{\max}]$.*

В соответствии с введенным определением предельно допустимая точность прогноза γ_R^{\max} удовлетворяет условию

$$\max_{T_{\min} \leq t \leq T_{\max}} |\tilde{R}(t) - R^*(t)| \leq \gamma_R^{\max}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\left\| \tilde{R}(t) - R^*(t) \right\|_{C[T_{\min}, T_{\max}]} = \max_{T_{\min} \leq t \leq T_{\max}} \left| \tilde{R}(t) - R^*(t) \right|. \quad (5)$$

В этих обозначениях $C[T_{\min}, T_{\max}]$ множество непрерывных функций, заданных на сегменте $C[T_{\min}, T_{\max}]$. В соответствии с введенным обозначением неравенство (4) может быть записано в эквивалентном виде:

$$\left\| \tilde{R}(t) - R^*(t) \right\|_{C[T_{\min}, T_{\max}]} \leq \gamma_R^{\max}. \quad (6)$$

Сформулируем уточненную постановку задачи прогнозирования остаточного ресурса полимерного композита в математической форме.

Уточненная постановка задачи прогнозирования остаточного ресурса.

Задача прогнозирования остаточного ресурса заключается в том, чтобы на основе кратковременных испытаний, проведенных на интервале времени $[0, T_{\min}]$, т.е. на основании информации о значениях остаточного ресурса $R - R_1, R_2, \dots, R_m$, измеренных в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T_{\min}$), спрогнозировать изменение остаточного ресурса полимерного композита на временном интервале $[T_{\min}, T_{\max}]$, с погрешностью, не превышающей заранее заданной предельно допустимой точности прогноза γ_R^{\max} (6).

3. Решение задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов в уточненных постановках

Приведем ряд утверждений, формулирующих условия, при выполнении которых применение разрабатываемого подхода позволяет осуществлять решение задачи прогнозирования остаточного ресурса в рассматриваемой постановке с заданной предельно допустимой точностью прогнозирования γ_R^{\max} (6).

Обозначим через $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ вектор погрешностей измерения исходных данных; $R(u; t)$ принятую параметрическую модель прогнозирования, определенную с точностью до вектора неопределенных параметров $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$; U - множество допустимых значений вектора неопределенных параметров $u \in U$; $u^*(Q)$ - вектор параметров прогнозируемой модели, являющейся решением задачи прогнозирования в рассматриваемой постановке на основе разрабатываемого подхода.

Так как, совокупность погрешностей Q_1, Q_2, \dots, Q_m рассматривается как совокупность непрерывных случайных величин, то в этом случае суммарная среднеквадратическая ошибка \tilde{S} также будет являться случайной величиной, зависящей, кроме вектора параметров u , дополнительно от случайных факторов Q_1, Q_2, \dots, Q_m , связанных с погрешностями измерений:

$$\tilde{S} = S(u, Q) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [R(u_1, u_2, \dots, u_m; t) - \tilde{R}_i]^2 \Rightarrow \min_{u \in U} \quad (7)$$

В этих обозначениях: $\tilde{R}_i = R_i(Q)$ – измеренные значения определяющего параметра R в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m с учетом погрешностей измерений Q_1, Q_2, \dots, Q_m . Вектор неопределенных параметров $u^*(Q)$, доставляет глобальный минимум суммарной среднеквадратической ошибке \tilde{S} (7):

$$S(u^*(Q); Q) = \min_{u \in U} S(u; Q). \quad (8)$$

Полагаем, что при отсутствии ошибок измерений ($Q=0$), временная зависимость остаточного ресурса R от времени на исследуемом временном интервале $[T_{\min}, T_{\max}]$ восстанавливается точно. Обозначим через $R^*(t)$ реальную временную зависимость остаточного ресурса. Параметрическое семейство функциональных зависимостей $R(u; t)$ для всех допустимых значений векторного параметра $u \in U$ и всех моментов времени t из временного интервала $[T_{\min}, T_{\max}]$ будем обозначать через M

$$M = \{R(u; t), \forall (u, t) \in U \times [T_{\min}, T_{\max}]\}, \quad (9)$$

Предполагается, что в многопараметрическом семействе моделей при строго определенном сочетании параметров $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in U$ может быть выделена модель для которой функциональная зависимость остаточного ресурса $R^*(t) = R(u^*; t)$, полностью совпадает с реальной временной зависимостью. В соответствии с этим $R^*(\cdot) \in M$. Реальной зависимости $R^*(t)$ соответствует вектор параметров u^* , являющийся оптимальным решением экстремальной задачи (7) при отсутствии ошибок измерений ($Q=0$). В соответствии с этим $R^*(t) = R(u^*; t)$.

Основываясь на полученных результатах, можно показать справедливость следующих утверждений. Обозначим через γ_U^{\max} - максимально допустимое отклонение вектора неопределенных параметров от вектора параметров u^* , соответствующего реальной временной зависимости определяющего свойства:

$$\|u - u^*\| \leq \gamma_U^{\max}. \quad (10)$$

Для ряда задач прогнозирования могут быть заданы предельные границы отклонения вектора неопределенных параметров прогнозируемой зависимости от вектора параметров реальной зависимости. Так, например, если априори известно, что множество U параллелепипед, так что

$$U = \{u \in E^n : u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max}, j = 1, \dots, n\}, \quad (11)$$

то величина γ_U^{\max} (10) может быть оценена следующим образом. Обозначим

$$\Phi_{\max} = \max_{u \in U} \max_{T_{\min} \leq t \leq T_{\max}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial R(u; t)}{\partial u_j} \right|. \quad (12)$$

Применяя соответствующие разложения в ряды Тейлора можно получить оценку

$$\left\| R(u^*(Q); t) - R(u^*; t) \right\|_{C[T_{\min}, T_{\max}]} \leq \Phi_{\max} \left[\sum_{j=1}^n (u_j^{\max} - u_j^{\min})^2 \right]^{1/2}. \quad (13)$$

На основе данной оценки можно получить неравенство

$$\sum_{j=1}^n (u_j^{\max} - u_j^{\min})^2 \leq \frac{(\gamma_R^{\max})^2}{\Phi_{\max}^2}. \quad (14)$$

Утверждение 1. Если допустимое множество изменения неопределенных параметров U задано в виде (11), то для достижения заданной погрешности прогнозирования γ_R^{\max} , на временном отрезке $[T_{\min}, T_{\max}]$, необходимо, чтобы границы области изменения неопределенных параметров, задаваемые множеством допустимых параметров U (11) были связаны с погрешностью прогнозирования γ_R^{\max} соотношением (14), где величина Φ_{\max} определяется соотношением (12).

Важное теоретическое значение полученной оценки (14) определяется тем, что она определяет, в каких пределах могут отклоняться неопределенные параметры модели прогнозирования u_j от оптимальных параметров модели прогнозирования u_j^* , чтобы прогнозируемая временная зависимость, не выходила за пределы заданной погрешности прогнозирования γ_R^{\max} .

Утверждение 2. Пусть функция $R(u; t)$ имеет непрерывные частные производные $\partial R / \partial u_j, j = 1, \dots, n$ для всех наборов $(u, t) \in U \times [0, T_{\max}]$. Тогда по заданному положительному вещественному числу $\gamma_R > 0$, найдется такое положительное число $\sigma_0 = \sigma_0(\gamma_R) > 0$, что при выполнении неравенства

$$\|Q\| \leq \sigma_0(\gamma_R), \quad (15)$$

будет выполнено неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T_{\max}} \left| R(u^*(Q); t) - R(u^*; t) \right| \leq \gamma_R. \quad (16)$$

Утверждение 3. Пусть функция $R(u; t)$ имеет непрерывные частные производные $\partial R / \partial u_j, j = 1, \dots, n$ для всех наборов $(u, t) \in U \times [0, T_{\max}]$. Тогда по заданному положительному вещественному числу $\gamma_U > 0$, найдется такое положительное число $\sigma_1 = \sigma_1(\gamma_U) > 0$, что при выполнении неравенства

$$\|Q\| \leq \sigma_1(\gamma_U), \quad (17)$$

будет выполнено неравенство

$$\|u^*(Q) - u^*\| \leq \gamma_U. \quad (18)$$

Справедливо следующее более общее утверждение, объединяющее результаты, сформулированные в утверждениях 2 и 3.

Утверждение 4. Пусть функция $R(u; t)$ имеет непрерывные частные производные $\partial R / \partial u_j, j = 1, \dots, n$ для всех наборов $(u, t) \in U \times [0, T_{\max}]$. Тогда по заданным положительным вещественным числам $\gamma_R > 0, \gamma_U > 0$, найдется такое положительное число $\sigma^* = \sigma^*(\gamma_R, \gamma_U) > 0$, что при выполнении неравенства

$$\|Q\| \leq \sigma^*(\gamma_R, \gamma_U), \quad (19)$$

будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T_{\max}} \left| R(u^*(Q); t) - R(u^*; t) \right| &< \gamma_R, \\ \|u^*(Q) - u^*\| &\leq \gamma_U. \end{aligned} \quad (20)$$

4. Заключение

Исследованы вопросы разработки эффективных, уточненных методов прогнозирования ресурса, долговечности конструкций из полимерных, композиционных материалов, основанных на современных достижениях в области математического моделирования.

Сформулированы утверждения, позволяющие выявить условия на параметры задач прогнозирования в уточненных постановках, при выполнении которых применение разработанных методов может позволить осуществлять прогноз остаточного ресурса полимерных композитов с заранее заданной точностью.

Сформулированные утверждения позволяют выявить условия на параметры задач прогнозирования остаточного ресурса полимерных композитов в уточненных по-

станков, при выполнении которых применение разработанных методов [6-8] может позволить осуществлять прогноз с заранее заданной точностью γ_R^{\max} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В. В. Болотин. – М.: Наука, 1984.
2. Уржумцев, Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов / Ю. С. Уржумцев – М.: Наука, 1982. – 222 с.
3. Уржумцев, Ю. С. Технические средства и методы определения прочностных характеристик конструкций из полимеров / Ю. С. Уржумцев, В. П. Майборода – М.: Машиностроение, 1984. – 169 с.
4. Уржумцев, Ю. С. Прогностика деформативности полимерных материалов / Ю. С. Уржумцев, Р. Д. Максимов // ИМП АН ЛатвССР. – Рига: Зинатне, 1975. – 416 с.
5. Булманис, В. Н. Прогнозирование изменения прочности полимерных волоконистых композитов в результате климатического воздействия / В. Н. Булманис, О. В. Старцев. – Якутск: Препринт, 1988. – 32 с.
6. Gusev, E. L. Using parallel procedures for the searching of the extremum for the decision of the inverse problems prediction of the defining characteristics of the composite materials / E.L. Gusev // Material Physics and Mechanics, 2016. – v. 26, N 1 – p. 70-72.
7. Гусев, Е. Л. Релаксационные методы в прогнозировании определяющих характеристик при воздействии экстремальных факторов внешней среды / Е. Л. Гусев // Международный журнал Международного союза ученых «Наука. Технологии. Производство», 2015. – №8 – С. 4-7.
8. Гусев, Е. Л. Методы, связанные с выделением перспективных направлений поиска для решения обратных задач прогнозирования определяющих характеристик полимерных композитов при воздействии экстремальных климатических факторов внешней среды и эксплуатационных нагрузок / Е. Л. Гусев // Сб. трудов Всероссийской научной конференции с международным участием (к 95-летию со дня рождения академика И.Ф. Образцова) «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 518-520.
9. Гусев, Е. Л. Методы поиска экстремума с оптимальным выбором параметров для решения задач восстановления параметров моделей прогнозирования определяющих характеристик полимерных композитов/ Е. Л. Гусев, Ф. И. Бабенко // Сб. трудов «Материалы для технических устройств и конструкций, применяемых в Арктике» – М.: ВИАМ, 2015. – С. 132-141.

Поступила в редколлегию 28.02.2017 г.